PRINCIPIO D'INDUZIONE E DIMOSTRAZIONE MATEMATICA

CHU WENCHANG

A. Induzione matematica: Introduzione

La gran parte delle proposizioni della teoria dei numeri dà enunciati che coinvolgono i numeri naturali; per esempio il teorema di Lagrange afferma che ogni numero naturale è rappresentabile come somma di quattro o meno quadrati. Come possiamo dimostrare che un'asserzione è vera per ogni numero naturale? Esistono alcune asserzioni che seguono direttamente dalle leggi dell'aritmetica, ad esempio identità algebriche quali

$$(n+1)^2 \;=\; n^2+2n+1.$$

Ma le proposizioni più interessanti e più genuinamente aritmetiche non sono come questo semplice esempio.

È chiaro che non possiamo dimostrare un asserto generale verificando che questo è vero quando il numero in questione è 1 oppure 2 o 3 e così via, poiché non ci è possibile effettuare infinite verifiche. Anche se verifichiamo che una proposizione è vera per ogni numero fino a un milione, o a un miliardo, non ci siamo neppure minimamente avvicinati a stabilire la veridicità in generale. In effetti è accaduto talvolta che proposizioni della teoria dei numeri, suggerite da un'estesa evidenza numerica, si siano poi rivelate lontane dal vero.

Può comunque accadere di potere trovare un'argomentazione generale con la quale siamo in grado di dimostrare che se la proposizione in oggetto è vera per il numero n, allora essa è vera per il numero successivo $n+1$. Se siamo in possesso di una tale argomentazione, allora il fatto che la proposizione sia vera per il numero 1 ne implicherà la validità per il numero successivo, 2; ed ancora, il fatto che essa sia vera per il numero 2 comporterà che essa è vera per il numero 3, e così via indefinitamente. La proposizione sarà pertanto vera per ogni numero naturale a patto che essa sia vera per il numero 1.

* E-mail address: *chu.wenchang@unile.it*.

Principio dell'induzione

La proposizione si dimostra per induzione tramite i seguenti tre passi:

(a) La proposizione è vera per $n = 1$;

(b) Supponi che la proposizione sia vera per n;

(c) Verifica che la proposizione è vera per $n + 1$.

Allora la proposizione è valida per tutti i numeri naturali.

Questo è il principio della dimostrazione per induzione. Il principio si enuncia per proposizioni che asseriscono che qualcosa è vera per ogni numero naturale, e per poterlo applicare è necessario dimostrare due cose: prima di tutto che l'asserzione in questione è vera per il numero 1, in secondo luogo che se l'asserzione è vera per il numero n che precede un quasivoglia numero $n + 1$, allora essa è vera per il numero $n + 1$ stesso. In queste circostanze potremo concludere che la proposizione è vera per ogni numero naturale.

Un semplice esempio illustrerà il concetto. Supponiamo di esaminare la somma $1 + 3 + 5 + \cdots$ di numeri dispari consecutivi fino ad un particolare numero assegnato m. Possiamo osservare che

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 1+3 \\
3^2 &= 1+3+5 \\
4^2 &= 1+3+5+7 \\
5^2 &= 1+3+5+7+9
\end{aligned}$$

e così via. Ciò suggerisce la proposizione generale per cui per ogni numero naturale m, la somma dei primi m numeri dispari è m^2. Cerchiamo di dimostrare questa proposizione generale per induzione. Essa è vera quando m è 1. Ora dobbiamo dimostrare che il risultato è vero per ogni numero m, e in virtù del principio di induzione siamo autorizzati a supporre che esso sia vero quando m è uguale al numero n; cioè, possiamo supporre che la somma dei primi n numeri dispari è n^2. La somma dei primi $n+1$ numeri dispari si ottiene da questa aggiungendovi l'$n+1$-esimo numero dispari, che è $2n+1$. Dunque la somma dei primi $n + 1$ dispari è $n^2 + (2n + 1)$, che in effetti uguaglia $(n + 1)^2$; cioè, la proposizione è vera anche per m uguale a $n+1$. Così abbiamo dimostrato la proposizione in generale.

Le dimostrazioni per induzioni lasciano talvolta perplessi gli inesperti, i quali tendono a reclamare: "state assumendo la proposizione che invece deve essere dimostrata". Il fatto è che una proposizione del tipo in questione comporta un'infinità di casi, uno per ciascun numero naturale $1, 2, 3, \cdots$ e tutto ciò che il principio di induzione ci autorizza a fare è supporre che, mentre si sta considerando uno di questi casi, il precedente sia già stabilito.

Una certa accuratezza è necessaria per esporre una dimostrazione per induzione in una forma tale da non causare confusione. Nell'esempio sopra considerato, la proposizione in questione era che la somma dei primi m numeri dispari è m^2. Qui m è un qualsiasi numero naturale e, naturalmente, l'enunciato conserva il medesimo significato se m viene sostituito con un qualunque altro simbolo, a condizione che si usi lo stesso simbolo nei due punti in cui esso compare. Ma una volta che la dimostrazione sia stata iniziata, n diventa un numero particolare, e si corre in tal caso il rischio di usare lo stesso simbolo in due sensi diversi, e persino di scrivere della assurdità quali "la proposizione è vera quando n è $n+1$". La procedura corretta è usare simboli diversi laddove sia necessario.

Dal punto di vista del senso comune, nulla potrebbe essere più ovvio della validità di una dimostrazione per induzione. Ciò nonostante è possibile dibattere se il principio abbia la natura di una definizione, di un postulato, o di un atto di fede. Ciò che in ogni caso sembra chiaro è che il principio di induzione è essenzialmente un'enunciazione della regola con la quale enumeriamo i numeri naturali in ordine con $n+1$, il successivo di n. Dunque il principio è in effetti una precisazione di ciò che si intende con la parola "e così via", parole che devono necessariamente comparire quando si cerca di enumerare i naturali.

Principio della forte induzione

La proposizione si dimostra per induzione tramite i seguenti tre passi:

(a) La proposizione è vera per $n = \ell$;

(b) Supponi che la proposizione sia vera per ognuno dei numeri naturali $\ell, \ell+1, \cdots, n$;

(c) Verifica che la proposizione è vera per $n+1$.

Allora la proposizione è valida per tutti i numeri naturali non inferiori a ℓ.

Esempio A1 (L'induzione incompleta)**.** *Dato un polinomio* $p(x) = x^2 + x + 11$*, si ha che*

$$\begin{aligned} p(0) &= 11 & \qquad p(5) &= 41 \\ p(1) &= 13 & p(6) &= 53 \\ p(2) &= 17 & p(7) &= 67 \\ p(3) &= 23 & p(8) &= 83 \\ p(4) &= 31 & p(9) &= 101. \end{aligned}$$

È facile vedere che tutti questi numeri sono primi. Ma il numero successivo $p(10) = 121 = 11 \times 11$ *non è più un primo.*

Esempio A2 (Fermat)**.** *I numeri di Fermat sono definiti come segue:*

$$f(n) \;=\; 1 + 2^{2^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Non è difficile verificare che i primi cinque valori

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \\ f(1) &= 5 \\ f(2) &= 17 \\ f(3) &= 257 \\ f(4) &= 65537 \end{aligned}$$

sono numeri primi. Ma il termine successivo non è più primo perchè:

$$f(5) \;=\; 641 \times 6700417.$$

Esempio A3 (Paradoso del creatore)**.** *Supponendo che ci siano* n *ragazze nella classe, allora si afferma che tutte le* n *ragazze hanno gli occhi dello stesso colore.*

B. Induzione matematica: Esempi

Esempio B1. *Dimostrare che*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esempio B2. *Dimostrare che*

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} \;=\; \frac{n}{n+1}.$$

Esempio B3. *Sia* n *un numero naturale. Dimostrare che*

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ = \quad & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Esempio B4. *Dimostrare che*

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx \;=\; \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Esempio B5. *Dimostrare che*

$$\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x \;=\; \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}.$$

Esempio B6. *Dimostrare che*

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sin^2 x} &= \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{x+\pi}{2}}\\ 4^n &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2}{\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}}.\end{aligned}$$

Esempio B7. *Siano* $\{x_k\}_{k=1}^n$ *numeri reali positivi con* $x_1x_2\cdots x_n = 1$. *Allora vale la seguente disuguaglianza*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \;\geq\; n.$$

Esempio B8. *Siano* $x_1, x_1, \cdots, x_n$ *numeri reali positivi. Allora la loro media geometrica è minore o uguale alla media aritmetica:*

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \;\leq\; \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Esempio B9 (Teorema binomiale)**.** *Dimostrare che per ogni numero naturale* n*, si ha il teorema binomiale:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \;=\; (x+y)^n.$$

Esempio B10 (Somma binomiale)**.** *Dimostrare che per ogni numero naturale* n*, si ha la formula binomiale:*

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} \;=\; \binom{m+1}{n+1}.$$

Esempio B11 (Convoluzione di Vandermonde)**.** *Dimostrare che per ogni numero naturale* n*, si ha la formula di convoluzione di Vandermonde:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} \;=\; \binom{x+y}{n}.$$

C. Induzione matematica: Esercizi

Esercizio C1. *Sia n un intero non negativo. Dimostrare che*

$$(1+\sqrt{3})^{2m+1}+(1-\sqrt{3})^{2m+1}$$

è divisibile per 2^{m+1} ma non per 2^{m+2}

Esercizio C2. *Sia n un intero non negativo. Dimostrare che il polinomio $x^{n+2}+(1+x)^{2n+1}$ è divisibile per x^2+x+1.*

Esercizio C3. *Determinare la condizione per cui vale*

$$\frac{1}{m!} \;<\; 3^{1-m}.$$

Sotto tale condizione, dimostrare questa disuguaglianza.

Esercizio C4. *Per $m \geq 2$, dimostrare che*

$$m! \;<\; \Big(\frac{m+1}{2}\Big)^m.$$

Esercizio C5. *Dimostrare che per ogni $c > 0$, si ha la seguente disuguaglianza*

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}} \;<\; 1+\sqrt{c}$$

dove la radice quadrata è stata applicata n volte.

Esercizio C6. *Dimostrare la seguente disuguaglianza*

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \;>\; 2\big(\sqrt{n+1}-1\big).$$

Esercizio C7. *Siano $x_1, x_1, \cdots, x_n$ numeri reali positivi con $0 < x_k < 1$. Allora per $n \geq 2$, si ha che*

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) > 1-x_1-x_2-x_n.$$

Esercizio C8. *Siano $x_1, x_2, \cdots, x_n$ numeri reali positivi. Allora vale la seguente disuguaglianza*

$$\big(x_1+x_2+\cdots+x_n\big)\times\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\Big) \;\geq\; n^2.$$

Esercizio C9. *Dimostrare la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 2\binom{n+2}{3}.$$

Esercizio C10. *Dimostrare che*

$$\frac{1^2}{1\times 3}+\frac{2^2}{3\times 5}+\frac{3^2}{5\times 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)\times(2n+1)} \;=\; \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Esercizio C11. *Dimostrare che*

$$\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{2}{3\times5\times7}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)\times(2n+1)\times(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Esercizio C12. *Dimostrare che ogni poligono convesso di* n *lati si può trasformare in un triangolo con la stessa area.*

Esercizio C13. *Sia* P *un poligono convesso che è contenuto in un altro poligono* Q. *Allora la circonferenza di* P *è inferiore a quella di* Q.

Esercizio C14 (Somma binomiale alterna)**.** *Dato un numero naturale* n, *dimostrare che per ogni numero naturale* $0 \leq k \leq n$, *vale la seguente formula binomiale:*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i} \;=\; (-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

Esercizio C15 (Numeri di Fibonacci)**.** *Sia* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una successione definita come segue:*

$$F_0 = 0 \qquad e \qquad F_1 = 1$$
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Dimostrare la seguente formula:

$$F_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

Prof. CHU Wenchang
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Lecce
Lecce-Arnesano P. O. Box 193
73100 Lecce, ITALIA
tel. 39+0832+297409
fax 39+0832+297410
Email *chu.wenchang@unile.it*